B Notre point de vue

Ce chapitre introduit un nouveau type de raisonnement, le raisonnement par récurrence. L'activité 1 permet une première approche de l'hérédité d'une propriété. L'autre notion importante de ce chapitre est la notion de limite. L'activité 2 permet de mettre en place les définitions des limites. Certaines formes indéterminées sont découvertes dans l'activité 3 et l'activité 4 permet de visualiser le théorème des gendarmes. Enfin l'activité 5 permet à l'aide d'un exemple plus concret de découvrir le théorème de convergence des suites monotones.
Nous avons pris le parti de démontrer le plus grand nombre de propriétés et théorèmes mais nous avons précisé les preuves exigibles par le programme et celles non exigibles.
L'approximation de réels (π, nombre d'or, des racines carrées et e) est étudiée dans l'approfondissement de l'accompagnement personnalisé et dans le TP1.
Des algorithmes sont dispersés dans les exercices et les TP.
Nous nous sommes efforcés de rester au plus près des exigences du programme.

Les notions abordées dans le chapitre 1

1. Raisonnement par récurrence
2. Limite finie ou infinie d'une suite
3. Théorèmes généraux sur les limites
4. D'autres théorèmes
5. Suites majorées, minorées et bornées

C Avant de commencer

Le QCM et les exercices proposés dans cette page permettent de faire le point sur la notion de suite étudiée en Première S.
Voir livre page 420 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrections détaillées.

D Activités

Activité 1 Une forêt de pins

Cette activité permet une première approche de la notion d'hérédité d'une propriété.

1. a. On a la formule de récurrence : $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n$.
D'où $v_1 = 10$, $v_2 = 6$ et $v_3 = 4$.
b. $v_4 = 3$ donc $v_4 > 2$. $v_5 = 2{,}5$ et $v_6 = 2{,}25$ donc $v_6 > 2$.
2. a. Si $v_p > 2$ alors $\frac{1}{2}v_p > 1$ et $1 + \frac{1}{2}v_p > 2$ soit $v_{p+1} > 2$.
b. $v_1 > 2 \Rightarrow v_2 > 2 \Rightarrow v_3 > 2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_{101} > 2$.

Activité 2 Comportement d'une suite pour n grand

Cette activité permet de découvrir les différents comportements des suites lorsque n tend vers $+\infty$ et de mettre en place les définitions des limites.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :
01_TS_activite2.ods (OpenOffice),
01_TS_activite2.xls (Excel 2003)
et 01_TS_activite2.xlsx (Excel 2007).

1. On constate que les suites de termes généraux n, n^2 et $(1,01)^n$ semblent tendre vers $+\infty$ et les suites de termes généraux $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ semblent tendre vers 0.
2. a. $u_n > 1\,000 \Leftrightarrow n > 10\sqrt{10}$. Donc $n_0 = 32$.
b. $u_n > 10^{12} \Leftrightarrow n > 10^6$. Donc $n_1 = 1\,000\,001$.
c. $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$. Donc $u_n > A$ à partir du premier entier naturel n_2 supérieur strictement à $\sqrt{A}$.
D'où l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir de n_2.
3. a. $v_n < 0{,}1 \Leftrightarrow n > 10$. Donc $n_0 = 11$.
b. $v_n < 10^{-12} \Leftrightarrow n > 10^{12}$. Donc $n_1 = 10^{12} + 1$.
$-10^{-12} < v_n < 10^{-12} \Leftrightarrow 0 < v_n < 10^{-12}$ car $v_n > 0$.
Donc pour tout $n \geqslant n_1$, $-10^{-12} < v_n < 10^{-12}$.
c. $-A < v_n < A \Leftrightarrow 0 < v_n < A \Leftrightarrow n > \frac{1}{A}$.
Soit n_2 le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{A}$.
Alors pour tout $n \geqslant n_2$, $-A < v_n < A$, autrement dit l'intervalle $]-A\,;A[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_2.

Activité 3 Limites « piégeuses »

Cette activité permet de découvrir l'existence des formes indéterminées : ici la forme indéterminée « $0\times\infty$ ».

1. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
b. $u_nv_n = n$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = +\infty$.
2. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.
b. $w_nt_n = \frac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} w_nt_n = 0$.
3. On trouve dans un cas $+\infty$ et dans l'autre cas 0 : on ne peut donc pas énoncer un résultat général.

Activité 4 Les gendarmes et le voleur

Cette activité permet de découvrir et de visualiser le théorème des gendarmes.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :
01_TS_activite4.ods (OpenOffice),
01_TS_activite4.xls (Excel 2003)
et 01_TS_activite4.xlsx (Excel 2007).

1. On multiplie l'encadrement $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ par $\frac{1}{n}$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. On peut conjecturer que la limite de la suite (v_n) est aussi 0.

Activité 5 Évolution du nombre d'adhérents d'un club de sport

À partir d'un exemple concret cette activité permet de découvrir le théorème de convergence des suites monotones.

1. Le nombre d'adhérents $(n + 1)$ années après la création s'obtient en multipliant a_n par $\frac{3}{4}$ et en rajoutant 1,2 centaines de nouveaux adhérents.
2. Initialisation : $a_0 = 3$ et $3 < 4{,}8$.
Hérédité : on suppose qu'il existe p tel que $a_p < 4{,}8$.
$a_p < 4{,}8 \Rightarrow 0{,}75\,a_p < 3{,}6 \Rightarrow a_{p+1} < 4{,}8$.
3. $a_{n+1} - a_n = -0{,}25\,a_n + 1{,}2$
$= -0{,}25(a_n - 4{,}8)$.
Or $a_n < 4{,}8$.
Donc $a_{n+1} - a_n > 0$.
4. On peut conjecturer que la suite converge vers 4,8.

E Exercices

POUR DÉMARRER

1 Supposons qu'il existe un entier p tel que $(xy)^p = x^p \times y^p$.
Alors $(xy)^{p+1} = (xy)^p \times (xy) = x^p \times y^p \times x \times y$ soit :
$$(xy)^{p+1} = x^{p+1} \times y^{p+1}.$$
2 Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geqslant 0$.
Alors $2u_p \geqslant 0$ soit $3 + 2u_p \geqslant 3$ et ainsi $u_{p+1} \geqslant 0$.
3 Initialisation : $0(0 + 1) = 0 = v_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :
$$v_p = p(p + 1).$$
Alors $v_{p+1} = p(p+1) + 2p + 2 = p^2 + 3p + 1$ soit :
$$v_{p+1} = (p + 1)(p + 2).$$
4 Initialisation : $3 - 2^{0+1} = 1 = u_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :
$$u_p = 3 - 2^{p+1}.$$
Alors $u_{p+1} = 2(3 - 2^{p+1}) - 3 = 3 - 2^{p+2}$.
5 Initialisation : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :
$$\sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}.$$
Alors :
$$\sum_{k=0}^{p+1} k = \sum_{k=0}^{p} k + p + 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{p+1} k = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$
6 Initialisation : $u_0 = -2 \leqslant 6$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leqslant 6$.
Alors $\frac{1}{2}u_p \leqslant 3$ et $u_{p+1} \leqslant 6$.

7 Voir livre page 420.
8 À partir du rang 20.
9 **1.** À partir du rang 6.
2. À partir du rang 71.
10 Voir livre page 420.
11 **1.** À partir du rang 10 001.
2. À partir du rang 100 001.
12 **1.** À partir du rang 202.
2. À partir du rang 2 002.

13 **1.** $+\infty$ **2.** $+\infty$ **3.** $+\infty$ **4.** -30 **5.** $-\infty$ **6.** $+\infty$
14 **1.** 4 **2.** 0 **3.** 0 **4.** $-\frac{3}{4}$
15 **1.** $+\infty$ **2.** $-\infty$ **3.** $+\infty$ **4.** $-\infty$
16 **1.** 0 **2.** 3 **3.** 0 **4.** 2
17 Voir livre page 420.
18 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.
19 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.
20 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ par comparaison.
21 **1.** $\cos n \geqslant -1$ donc $u_n \geqslant n^2 - 1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.
22 **1.** $(-1)^n \leqslant 1$ donc $u_n \leqslant -n + 1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ par comparaison.
23 **a.** $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ donc (u_n) converge vers 0.
b. $-\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\sin n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc (u_n) converge vers 0.
24 **1.** On multiplie par -20 puis on ajoute n.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.
25 **1.** 0 **2.** $+\infty$ **3.** Diverge sans limite.
26 **a.** 0 **b.** 0 **c.** Diverge sans limite.
27 **a.** 0 **b.** $+\infty$ **c.** $-\infty$ **d.** Diverge sans limite. **e.** $+\infty$
28 Voir livre page 420.
29 **a.** $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b. $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{7}{5}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
30 **1.** $S_n = -2 \times \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = -6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.
2. (S_n) converge vers -6.
31 **1.** $S_n = 3 \times \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

2. (S_n) converge vers $\frac{9}{4}$.

32 **1.** $u_n - 1 = \frac{1}{n} > 0$ donc (u_n) est minorée par 1.
2. $u_{10000} = 1{,}0001 < 1{,}001$.
Donc (u_n) n'est pas minorée par 1,0001.

33 Voir livre page 420.

34 **1. b.** $u_n - 1 = n^2 + 4n > 0$ donc 1 peut être un minorant de (u_n).
c. Oui car les 10 premiers termes sont supérieurs à –3.
2. $u_n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 > 0$.
3. La suite (u_n) est minorée par –3.

35 **1.** (u_n) semble être majorée par 2.
2. $u_n - 2 = \frac{-5}{n+2} < 0$ donc $u_n < 2$.
3. (u_n) est majorée par 2.

36 **1.** $u_{n+1} - u_n = \frac{12}{(3n+2)(3n+5)} > 0$ donc (u_n) est croissante.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
3. (u_n) étant croissante et de limite 3, on en déduit que la suite est majorée par 3. De plus elle est minorée par son premier terme $u_0 = 1$. Donc $1 \leq u_n < 3$.

37 **1.** $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ donc (u_n) est croissante.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
3. $0 \leq u_n < 1$.

38 **1.** $2 \leq u_n \leq 4$. **2.** $-3 \leq u_n \leq -1$. **3.** $-4 \leq u_n \leq 4$.

39 Voir livre page 420.

40 **2.** Initialisation : $u_0 = 2 \leq 9$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq 9$.
Alors $\frac{2}{3}u_p \leq 6$ et ainsi $u_{p+1} \leq 9$.
3. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(9 - u_n) \geq 0$.
b. (u_n) est croissante.
4. (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

41 **2.** Initialisation : $u_0 = -1 \geq -4$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq -4$.
Alors $\frac{1}{2}u_p \geq -2$ et ainsi $u_{p+1} \geq -4$.
3. a. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n + 4) \leq 0$.
b. (u_n) est décroissante.
4. (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

POUR S'ENTRAÎNER

42 Initialisation : $\frac{0}{0+1} = 0 = t_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $t_p = \frac{p}{p+1}$.
Alors $t_{p+1} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)}$
soit $t_{p+1} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$.

43 **2. a.** On peut conjecturer que $u_n = n^2$.
b. Initialisation : $1^2 = 1 = u_1$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p = p^2$.
Alors $u_{p+1} = p^2 + 2p + 1$, soit $u_{p+1} = (p+1)^2$.

44 **2.** On peut conjecturer que $u_n = 2$.
3. Initialisation : $2 = u_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p = 2$.
Alors $u_{p+1} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2}$ soit $u_{p+1} = 2$.

45 **1.** Initialisation : $u_1 - u_0 = 5 - 8 = -3 \leq 0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_{p+1} - u_p \leq 0.$$

Alors : $u_{p+2} - u_{p+1} = \left(\frac{1}{4} \times u_{p+1} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} \times u_p + 3\right)$

$$u_{p+2} - u_{p+1} = \frac{1}{4}(u_{p+1} - u_p) \leq 0.$$

2. (u_n) est donc décroissante.

46 Initialisation : $u_0 = \frac{1}{7}$ donc $0 < u_0 < 2$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $0 < u_p < 2$.
Alors en multipliant par $\frac{3}{4}$ et ajoutant $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$0 < u_{p+1} < 2.$$

47 **1. a.** $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)$. Sur [2 ; 4], f est donc strictement croissante et $f([2 ; 4]) = \left[2 ; \frac{5}{2}\right]$.
b. Ainsi, pour tout x de [2 ; 4], $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2} \leq 4$.
2. Initialisation : $u_0 = 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 4$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $2 \leq u_p \leq 4$.
Alors $2 \leq f(u_p) \leq 4$ d'après **1. b.**
Soit $2 \leq u_{p+1} \leq 4$.

48 Initialisation : $u_1 = \sqrt{5}$ et $u_0 = 2$ donc $u_1 \geq u_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_{p+1} \geq u_p$.
Alors $2u_{p+1} + 1 \geq 2u_p + 1$.
D'où, en passant à la racine, $u_{p+2} \geq u_{p+1}$.

49 **1. a. b.** $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ et $f(1) = 1$ donc $f(x) \geq 1$.
2. Initialisation : $u_0 = 3$ donc $u_0 \geq 1$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq 1$.
Alors $f(u_p) \geq 1$ d'après **1. b**, soit $u_{p+1} \geq 1$.
3. Initialisation : $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_0 = 3$ donc $u_0 \geq u_1$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq u_{p+1}$.
Alors $f(u_p) \geq f(u_{p+1})$ puisque f est croissante soit $u_{p+1} \geq u_{p+2}$.
Donc (u_n) est décroissante.

50 Initialisation : $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = 1^2$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sum_{q=1}^{p} q^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Alors $\sum\limits_{q=1}^{p+1} q^2 = \sum\limits_{q=1}^{p} q^2 + (p+1)^2$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2.$$

Ainsi $\sum\limits_{q=1}^{p+1} q^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$.

51 Initialisation : $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sum_{k=1}^{p} k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}.$$

Alors $\sum\limits_{k=1}^{p+1} k^3 = \sum\limits_{k=1}^{p} k^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3$.
Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{p+1} k^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$.

53 FAUX : une fonction croissante peut générer une suite décroissante. $u_1 = \frac{17}{6}$ et $u_0 = 3$, ainsi $u_0 \geq u_1$.

54 **1.** On peut conjecturer que (v_n) converge vers 2.
2. Soit $I =]2 - a ; 2 + a[$ avec $a > 0$:

$$2 - a < v_n < 2 + a \Leftrightarrow n > \frac{1}{a^2}.$$

55 **1.** À partir du rang 10.
2. Soit $I =]3 - a ; 3 + a[$ avec $a > 0$:

$$3 - a < v_n < 3 + a \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

57 **1.** $u_n > 1\,000$ à partir du rang 502.
$u_n > 10^6$ à partir du rang 500 002.
2. $u_n > A \Leftrightarrow n > \frac{A+3}{2}$.

58 **1.** $u_n > 10^6$ à partir du rang $10^{12} + 1$.
2. $u_n > A \Leftrightarrow n > A^2$.

59 **1.** $u_n < -1\,000$ à partir du rang 201.
2. $u_n < A \Leftrightarrow n > \frac{2-A}{5}$.

60 **1.** ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :***
01_TS_exercice60.alg (AlgoBox).
L'algorithme sert à déterminer à partir de quel rang 3^n dépasse un réel M donné.
2. Avec $M = 20$: $n = 3$, avec $M = 100$: $n = 5$, avec $M = 10^6$: $n = 13$.
3. Conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

61 **1.**

```
Saisir r
n prend la valeur 0
u prend la valeur 1
   Tant que u > 3 + r ou u < 3 – r
   |  n prend la valeur n + 1
   |  u prend la valeur (3n + 1)/(n + 1)
   Fin Tant que
Afficher n
```

2. ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :* 01_TS_ exercice61.alg (AlgoBox).**
Pour $r = 0{,}1$: $n = 19$; pour $r = 10^{-6}$: $n = 2 \times 10^6$.

62 À partir d'un certain rang, tous les termes seront dans un intervalle de centre 1 et de rayon 0,5.

63 Voir livre page 420.

64 FAUX, par exemple $u_n = n + (-1)^n$.

65 FAUX : elle peut ne pas avoir de limite, par exemple :

$$u_n = (-1)^n.$$

66 VRAI d'après la définition de la convergence d'une suite.

67 **1.** $-\infty$ **2.** 0 **3.** $+\infty$ **4.** 4

68 **1.** $u_n = \frac{3}{n} + n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = 2n(n-2)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

69 **1.** $-\infty$ **2.** $-\infty$ **3.** 0 **4.** $-\frac{2}{3}$ **5.** $+\infty$ **6.** $-\infty$

70 Voir livre page 420.

71 **1.** $u_n \geq n - 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $\frac{n-1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. $u_n \geq \frac{n}{3}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. $u_n \leq -n^2 + 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

72 Voir livre page 420.

73 **1.** $+\infty$ **2.** $+\infty$ **3.** $+\infty$ **4.** Diverge sans limite.

74 **1.** $-\infty$ **2.** 0 **3.** $+\infty$ **4.** 2 **5.** $+\infty$ **6.** $+\infty$

75 **a.** $-0{,}5^n \leq u_n \leq 0{,}5^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b. $u_n \geq 3^n - 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
c. $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

77 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :* 01_TS_exercice77.alg (AlgoBox).**
1. a. Le nombre de personnes touchées par la rumeur dans l'intervalle $[n ; n+1]$ est proportionnel à u_n donc il existe un réel a tel que le nombre de personnes touchées par la rumeur dans l'intervalle $[n ; n+1]$ soit égal à au_n.
D'où $u_{n+1} = u_n + au_n = (1+a)u_n$.
b. (u_n) est une suite géométrique de raison $1 + a$.
c. $u_0 = 100$ et $u_1 = 350$, d'où $1 + a = 3{,}5$ soit $a = 2{,}5$.
d. $u_n = u_0 \times (1+a)^n = 100 \times 3{,}5^n$.
2. a. (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
b. $u_n \geq 10\,000$ à partir de $n = 4$ heures.
$u_n \geq 16\,000$ à partir de $n = 5$ heures.
$u_n \geq 20\,000$ à partir de $n = 5$ heures.

78 **1.** NON : $u_n = n$ et $v_n = -n$.
2. NON : $u_n = (-1)^n = v_n$.
3. NON : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = (-1)^n$.
4 . VRAI : par l'absurde, si (w_n) converge alors $(w_n - u_n)$ soit (v_n) converge.

79 **1.** FAUX : $u_n = -n$.
2. VRAI : théorème de comparaisons.

80 **1.** FAUX : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. VRAI : théorème des gendarmes.
3. FAUX : quand la raison est égale à 0.

81 $u_n - 2 = (n-1)^2 \geq 0$ donc $u_n \geq 2$.

82 $v_n - 5 = \frac{-5}{n+1} \leq 0$ donc $v_n \leq 5$.

83 Par récurrence, initialisation : $u_0 = 4$ donc $-3 \leq u_0 \leq 4$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$-3 \leq u_p \leq 4.$$

Alors $-1 \leq \frac{1}{3}u_p \leq \frac{4}{3}$ et ainsi $-3 \leq u_{p+1} \leq -\frac{2}{3}$ soit $-3 \leq u_{p+1} \leq 4$.

84 Voir livre page 420.

85 **1.** NON : $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 1$.
2. NON : même contre-exemple qu'au **1**.
3. OUI car $v_n \leq M$ donc $u_n \leq M$.
4. OUI car $v_n \leq v_0$ donc $u_n \leq v_0$.

86 **1.** $v_n - u_n = \frac{1}{n} \geq 0$, donc $v_n \geq u_n$.
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

3. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} \leqslant 0$, donc (v_n) est décroissante.

4. $u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$ avec $u_1 = 1$ et $v_1 = 2$.

87 **1.** $u_1 = \dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$;

$u_3 = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} = \dfrac{3}{4}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Donc $u_n < 1$.

88 FAUX : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge.

89 VRAI : une suite croissante convergente est majorée par sa limite.

90 FAUX : $u_n = (-2)^n$.

91 **1.** Par récurrence : $u_n \leqslant 6$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(6 - u_n) \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.

3. (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

92 **1. a.** La fonction f étant croissante sur $]-\infty ; 6[$ $\left(f'(x) = \dfrac{9}{(6-x)^2} > 0\right)$, si $x < 3$ alors $f(x) < f(3)$ soit :

$$\frac{9}{6-x} < 3.$$

b. Par récurrence, on montre que $u_n < 3$.

c. Grâce au sens de variation de f, on démontre par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$.

d. (u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

2. a. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 3} - \dfrac{1}{u_n - 3} = \dfrac{6 - u_n}{3u_n - 9} - \dfrac{1}{u_n - 3}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3 - u_n}{3u_n - 9} = -\frac{1}{3}.$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. $v_n = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}n$ et $u_n = \dfrac{6n-3}{2n+1}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

94 **1.** On a 80 % de réabonnement ($0{,}8a_n$) augmenté de 4 000 abonnés (+4 000), donc $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4\,000$.

2. Par récurrence, on montre que $a_n \leqslant 20\,000$.

3. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{5}(20\,000 - a_n) \geqslant 0$ donc (a_n) est croissante.

4. a. $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8 avec $u_0 = 13\,000$.

b. $u_n = 13\,000 \times 0{,}8^n$ et $a_n = 20\,000 - 13\,000 \times 0{,}8^n$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 20\,000$. Le nombre d'abonnés tend vers 20 000.

5. a. ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :* 01_TS_exercice94.alg (AlgoBox).**

```
▼ VARIABLES
  ├ n EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ a EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ a PREND_LA_VALEUR 7000
  ├ n PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ TANT_QUE (a<=16000) FAIRE
    ├ DEBUT_TANT_QUE
    ├ n PREND_LA_VALEUR n+1
    ├ a PREND_LA_VALEUR 0.8*a+4000
    └ FIN_TANT_QUE
  └ AFFICHER n
└ FIN_ALGORITHME
```

b. $a_n > 16\,000$ à partir de $n = 6$.

95 **1.** FAUX : une suite croissante non majorée diverge.

2. FAUX : une suite décroissante minorée vers 0 converge vers un réel $L \geqslant 0$.

3. VRAI : par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

96 Initialisation : $u_4 = 26$ et $2^4 = 16$ donc $u_4 \geqslant 2^4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geqslant 2^p$.

Alors $u_p{}^2 \geqslant 2^{2p} > 2^{p+1}$ (car $2p > p+1$).

D'où $u_{p+1} = u_p{}^2 + 1 > u_p{}^2 > 2^{p+1}$.

97 $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 2 = -2v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison -2.

On en déduit que $v_n = 4 \times (-2)^n$ et $u_n = 1 + 4 \times (-2)^n$.

La suite (u_n) diverge sans limite.

98 Par récurrence, on montre que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ puis que :

$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$

(u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

POUR FAIRE LE POINT

Voir livre page 420 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

ACCOMPAGNEMENT PERSONNALISÉ

111 Initialisation : $2 \times 5^0 + 1 = 3 = u_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p = 2 \times 5^p + 1.$$

Alors $5u_p = 2 \times 5^{p+1} + 5$ et ainsi $u_{p+1} = 2 \times 5^{p+1} + 1$.

112 Initialisation : $u_1 = 0$ et $0 \leqslant 4$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leqslant 4$.

Alors $3u_p + 4 \leqslant 16$ et ainsi $u_{p+1} \leqslant 4$.

113 **a.** $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** 0 **d.** $+\infty$

▶ *Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite*

› Avec deux racines : $\sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Avec trois racines : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1{,}553$.

› Après l'élévation au carré (avec la condition $x > 0$), l'équation $x = \sqrt{1+x}$ devient $x^2 - x - 1 = 0$ et sa solution positive est :

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

› Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{3}$. On a bien $\Phi \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\Phi \leqslant u_{p+1} \leqslant u_p \leqslant 2.$$

Alors en passant à la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ (croissante), on obtient :

$$\Phi \leqslant u_{p+2} \leqslant u_{p+1} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2.$$

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

› $u_{n+1} - \Phi = \sqrt{1+u_n} - \Phi = \dfrac{1 + u_n - \Phi^2}{\sqrt{1+u_n} + \Phi}$

$$= \frac{u_n - \Phi}{\sqrt{1+u_n} + \Phi} \leqslant \frac{1}{3}(u_n - \Phi)$$

car $\sqrt{1+u_n} + \Phi = u_{n+1} + \Phi \geqslant 2\Phi$ et $2\Phi = 1 + \sqrt{5} \geqslant 3$.

› Par récurrence, on montre que $0 \leqslant u_n - \Phi \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

› D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \Phi = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \Phi.$$

› $\Phi \approx 1{,}618033989$.

114 **1.** $f'(x) = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$.

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$\sqrt{a}$	↗	

2. $f(x) - x = \dfrac{a - x^2}{2x}$.

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	

3. Initialisation : $u_1 = f(u_0)$ et $u_0 > \sqrt{a}$.

Donc $f(u_0) - u_0 < 0$ d'où $u_1 < u_0$.

De plus $f(u_0) > f(\sqrt{a})$ (f est croissante sur $[\sqrt{a} ; +\infty[$), donc :

$$u_1 > \sqrt{a}.$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$\sqrt{a} < u_{p+1} < u_p.$$

Alors $f(\sqrt{a}) < f(u_{p+1}) < f(u_p)$ soit $\sqrt{a} < u_{p+2} < u_{p+1}$.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente, soit L sa limite.

L vérifie $f(L) = L$ d'où $L = \sqrt{a}$.

4. Avec $u_0 = 2$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732050807569$.

Avec $u_0 = 3$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2360679775$.

115 **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc (u_n) est croissante.

2. $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k^2(k-1)} > 0$.

En faisant varier k de 2 à n et par addition : $u_n - 1 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ d'où $u_n \leqslant 2$.

3. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

4. $u_n \approx 3{,}1415917429$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Suites imbriquées

L'objectif de ce TP est de découvrir deux suites qui convergent vers le même réel.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

01_TS_TP1.alg (AlgoBox), 01_TS_TP1.ods (OpenOffice), 01_TS_TP1.xls (Excel 2003) et 01_TS_TP1.xlsx (Excel 2007).

A. Étude d'un algorithme et programmation

1. Pour $N = 1$, $P = 1$; pour $N = 2$, $P = 1 \times 2 = 2$; pour $N = 3$, $P = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

4. $P = N! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times N$.

B. 1. On entre en **B2** la formule **=1/FACT(0)+1/FACT(A2)**.

On entre en **C2** la formule **=B2+1/(A2*FACT(A2))**.

On entre en **D2** la formule **=C2-B2**.

On entre en **B3** la formule **=B2+1/FACT(A3)**.

On entre en **C3** la formule **=B3+1/(A3*FACT(A3))**.

On entre en **D3** la formule **=C3-B3**.

On recopie vers le bas jusqu'à la ligne **21**.

2. On sélectionne les quatre colonnes **A, B, C** et **D** ; puis dans le menu Insertion, choisir Nuage de points.

B. Étude de trois suites à l'aide d'un tableur

3. On peut conjecturer que :

a. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

b. (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ;

c. (e_n) converge vers 0.

C. Étude mathématique

1. $u_n - v_n = -\dfrac{1}{n \times n!} < 0$.

2. $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{-n^2 - n + 1}{(n+1)(n+1)!} < 0$.

Donc (v_n) est décroissante.

4. a. b. $u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$.

5. On applique le théorème de convergence des suites monotones.

6. a. $n! \geqslant 1$ donc $n \times n! \geqslant n$.

b. Par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{n \times n!} \leqslant \dfrac{1}{n}$ d'où $0 \leqslant e_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} e_n = 0.$$

7. Si l'on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = L' - L = 0 \text{ donc } L = L'.$$

$2{,}71828182 < L < 2{,}71858483$.

TP 2 Méthode des isopérimètres

Dans ce TP, les élèves vont découvrir une méthode historique permettant de déterminer une valeur approchée de π à l'aide d'une suite de polygones.

***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :* 01_TS_TP2A.ggb (GeoGebra) et 01_TS_TP2C.alg (AlgoBox).**

Correctif : Dans l'algorithme de la partie C, il faut lire à la dernière ligne « Afficher $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{h}$, n » et non pas « Afficher $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{n}$, n ».

A. Tracé des polygones et des cercles

1. À l'aide de la commande Nouveau point (outil Points), placer A_0 puis tracer un segment de longueur 0,5 avec la commande Segment créé par un point et une longueur (outil Lignes).

Renommer B_0 la deuxième extrémité du segment. Construire le carré $A_0B_0C_0D_0$ en utilisant la commande Polygone régulier (outil Polygones), penser à renommer les points. Placer O, le centre du carré $A_0B_0C_0D_0$, avec la commande Milieu ou centre (commande Points). Tracer ensuite le cercle circonscrit avec la commande Cercle(centre-point) (outil Cercles).

2. a. Placer le milieu M_0 de $[A_0B_0]$ avec la commande Milieu ou centre (commande Points). Puis tracer la demi-droite $[OM_0)$ avec la commande Demi-droite passant par deux points (outil Lignes).

Placer le point I_0 avec la commande Intersection entre deux objets (outil Points).

2. FAUX : (u_n) n'a pas de limite.

5. a. $S_n = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

b. $T_n = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{4}(n+1)(n-7)$.

116 **1.** Initialisation : $u_0 = 0 \leqslant 3$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \leqslant 3$.
Alors $u_p + 6 \leqslant 9$ et $\sqrt{u_p + 6} \leqslant 3$ ce qui s'écrit $u_{p+1} \leqslant 3$.
2. On démontre par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

117 $\frac{2}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n}$ donc (u_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.
La suite (v_n) diverge sans limite.
$\frac{-4}{\sqrt{n}} \leqslant w_n \leqslant \frac{4}{\sqrt{n}}$ donc (w_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

118 **1.** $u_1 = -6$; $u_2 = -3$.
2. Initialisation : $\frac{27}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{15}{4} = \frac{27}{4} - \frac{15}{4} = 3 = u_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :
$$u_p = \frac{27}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^p - \frac{15}{4}.$$
Alors : $u_{p+1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{27}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^p - \frac{15}{4}\right) - 5 = \frac{27}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{p+1} - \frac{15}{4}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{15}{4}$.
D'où (u_n) converge.

POUR ALLER PLUS LOIN

119 Si on note u_n le nombre de poignées de mains serrées par la n-ième personne, alors $u_{n+1} = u_n + n$ (car la $(n+1)$-ième personne échangera n poignées de mains supplémentaires).
À partir de là, on démontre par récurrence que $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

120 **1.** En rajoutant un sommet A_{n+1}, on ajoute $(n-1)$ diagonales.
2. Si on note d_n le nombre de diagonales, on obtient :
$$d_{n+1} = d_n + (n-1).$$
À partir de là, on démontre par récurrence $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.
3. De chaque sommet partent $(n-3)$ diagonales (il faut éliminer le sommet ainsi que les deux sommets adjacents). Il y a n sommets mais il faut diviser le produit $n(n-3)$ par 2 car chaque diagonale est comptée deux fois.

121 *Correctif : x est un réel non nul et n est un entier naturel non nul.*
1. Hérédité : supposons qu'il existe un entier k tel que :
$$x^k - 1 = (x-1)\sum_{p=0}^{k-1} x^p.$$
$$x^{k+1} - 1 = x(x^k - 1) + x - 1 = x(x-1)\sum_{p=0}^{k-1} x^p + x - 1.$$
$$= (x-1)\sum_{p=0}^{k-1} x^{p+1} + x - 1$$
$$= (x-1)\sum_{p=1}^{k} x^p + x - 1 = (x-1)\sum_{p=0}^{k} x^p.$$
2. On obtient directement le résultat avec la formule :
$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

122 **1.** OUI : par récurrence.

2. OUI : par récurrence, si $u_p \geqslant 1$ alors $f(u_p) \geqslant f(1)$ avec $f(x) = \sqrt{3x-2}$ (f croissante sur $]1\,;+\infty[$). D'où $u_{p+1} \geqslant 1$.
3. NON.
4. OUI : car (u_n) étant croissante et majorée par 2, elle converge et sa limite L vérifie $L = f(L)$ soit $L = 2$.
5. OUI : car (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge et sa limite L vérifie $L = f(L)$ soit $L = 2$.

123 $u_n = q^n$ et $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
1. VRAI : on raisonne par l'absurde, si $q \leqslant 1$ alors $u_n \leqslant 1$.
2. VRAI : si $q < 1$ alors (u_n) converge vers 0 donc $u_n < \frac{1}{2}$ pour n suffisamment grand.
3. VRAI : si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
De plus $S_n \geqslant u_n$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
4. VRAI : si (S_n) converge, c'est nécessairement que $0 < q < 1$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$. On en déduit que $\dfrac{1}{1-q} = 2$ soit $q = \frac{1}{2}$.
5. FAUX : si $q = 2$ alors $S_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$.

124 $f'(x) = 1 - x^2$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	

1. D'après les variations de f, si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.
Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0\,;1]$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \in [0\,;1]$.
Alors $f(u_p) \in [0\,;1]$ soit $u_{p+1} \in [0\,;1]$.
2. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}(u_n)^3 \leqslant 0$ donc (u_n) est une suite décroissante.
3. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie $L = L - \frac{1}{3}L^3$ d'où $L = 0$.

125 **1.** $f'(x) = \dfrac{x^2-9}{2x^2}$.

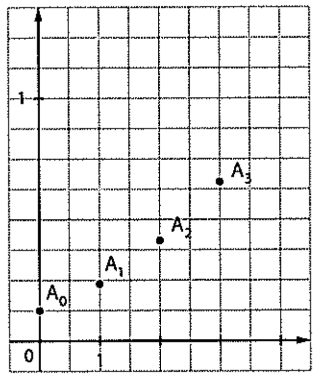
x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

2. Initialisation : $u_0 = 4$ donc $u_0 \geqslant 3$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geqslant 3$.
Alors $f(u_p) \geqslant f(3)$ soit $u_{p+1} \geqslant 3$
3. Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = \frac{25}{8}$ donc $u_1 \leqslant u_0$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $u_{p+1} \leqslant u_p$.
Alors $f(u_{p+1}) \leqslant f(u_p)$ soit $u_{p+2} \leqslant u_{p+1}$.
Donc (u_n) est une suite décroissante.
4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{9}{L}\right)$.
D'où $L^2 = 9$. La valeur $L = -3$ est impossible car $u_n \geqslant 3$, d'où $L = 3$.

126 Soit L la limite de (u_n). On choisit un intervalle de centre L, par exemple $]L-1\,;L+1[$. Seul un nombre fini de termes de la suite sont en dehors de cet intervalle, donc (u_n) est bornée.

127 **1. a.** $w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{u_n+v_n}{2}$
$$= \frac{(2\sqrt{2}-3)(u_n - v_n)}{2} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)w_n.$$
Donc (w_n) est une suite géométrique de raison :
$$q = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0{,}086.$$
b. $-1 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
2. On a $w_n = (\sqrt{2}-1)\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^n > 0$ donc $u_n \leqslant v_n$.
3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n > 0$ donc (u_n) est une suite croissante.
$v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}w_n < 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.
4. $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Grâce au théorème de convergence des suites monotones bornées, (u_n) et (v_n) convergent ; leurs limites sont égales car $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

128 **1. a.** $u_1 = \frac{15}{64}$; $u_2 = \frac{1\,695}{4\,096}$.
b.



2. a. Soit $f(x) = x(2-x)$.
On a $f'(x) = 2(1-x)$.
f est croissante sur $[0\,;1]$ et pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$.
Initialisation : $u_0 = \frac{1}{8}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $0 \leqslant u_p \leqslant 1$.
Alors $0 \leqslant f(u_p) \leqslant 1$ soit $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.
b. $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) \geqslant 0$ car $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
Donc (u_n) est une suite croissante.
c. (u_n) étant une suite croissante et majorée, elle est convergente.
3. a. $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1-u_n)^2 = v_n^2$.
b. On en déduit par récurrence que $v_n = v_0^{2^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$.
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

129 **1. a.** $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1} = 0{,}96$.
b. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}96$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,96.
c. $u_n = u_0 \times 0{,}96^n$.
2. $u_0 \times 0{,}96^n \leqslant 0{,}60 \times u_0$ soit $0{,}96^n \leqslant 0{,}60$ soit $n \geqslant 13$.
Il faut au moins 13 lames.

130 **1.** (u_n) est une suite géométrique de raison 0,917 et a pour limite 0.
2. a. Puisque la suite a pour limite 0 et est à termes positifs, à partir d'un certain rang, tous les termes u_n seront dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}u_0\right[$.
b. On résout $u_0 \times 0{,}917^n = \frac{1}{2}u_0$: $n = 8$.

131 **1. a.** $u_2 = 105 + 20 = 125$.
b. u_n est le montant en € versé à Marc le n-ième jour. Chaque jour, on lui offre 5 % de plus que la veille, donc le $(n+1)$-ième jour, Marc se voit offrir $1{,}05u_n$ € auxquels s'ajoutent 20 €.
D'où $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 20$.
2. a. $v_1 = u_1 + 400 = 500$.
b. $v_{n+1} = 1{,}05v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05.
c. $v_n = 500 \times 1{,}05^{n-1}$
et $u_n = v_n - 400 = 500 \times 1{,}05^{n-1} - 400$.
d. $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 10\,000\,(1{,}05^n - 1)$.
3. Soit S_n la somme gagnée au bout de n jours.
$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 10\,000\,(1{,}05^n - 1) - 400n$.
Avec la calculatrice :

n	$S_n \approx$
21	9459,6
22	10453

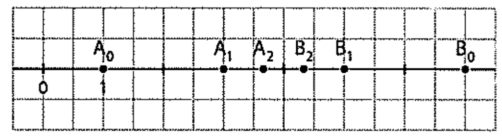
Au bout de 22 jours, Marc aura gagné 10 000 €.

132 **1.** Initialisation : $\frac{1}{1!} = 1$ et $\frac{1}{2^{1-1}} = 1$ donc $\frac{1}{1!} \leqslant \frac{1}{2^{1-1}}$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que $\frac{1}{p!} \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}$.
Multiplions par $\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{2}$, on a alors $\frac{1}{(p+1)!} \leqslant \frac{1}{2^p}$.
2. Par addition de ces inégalités, on obtient :
$$u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$
Soit $u_n \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$.
La suite (u_n) est majorée par 2.
Elle est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
D'où (u_n) converge.

133 **1. a.** $v_n = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.
b. D'après le calcul de v_n : $v_n > \frac{1}{2}$.
c. $v_n < \frac{3}{4}$ pour $n^2 - 4n - 2 > 0$ soit $n \geqslant 5$.
d. Pour $n \geqslant N$, $v_n < \frac{3}{4}$ soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$ donc $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.
2. a. Initialisation : $u_5 \leqslant u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :
$$u_p \leqslant u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{p-5}.$$
Alors en multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{3}{4}u_p \leqslant u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{p-4}$.
Or $u_{p+1} < \frac{3}{4}u_p$, d'où $u_{p+1} \leqslant u_5\left(\frac{3}{4}\right)^{p-4}$.
b. On additionne les différentes inégalités précédentes.
c. $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leqslant 4$.
D'où en multipliant par u_5 : $S_n \leqslant 4u_5$.
3. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante. Comme elle est majorée (par $4u_5$), elle converge.

134 **1.** Initialisation : $0 < 1{,}01 < 1{,}01^2$ donc $0 < u_0 < u_1$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :
$$0 < u_p < u_{p+1}.$$
Alors $0 < u_p^2 < u_{p+1}^2$ soit : $0 < u_{p+1} < u_{p+2}$.
D'où (u_n) est une suite croissante.
2. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.
Soit L sa limite, L vérifie $L^2 = L$ soit $L = 0$ ou $L = 1$.
3. La suite (u_n) étant croissante, elle est minorée par son premier terme 1,01. Si la suite est majorée, elle converge et sa limite est soit 0 soit 1.
Or cette limite est supérieure à 1,01. D'où l'absurdité. Donc (u_n) n'est pas majorée. De plus, elle est croissante.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

135 **1.** ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :***
01_TS_exercice135.ods (OpenOffice),
01_TS_exercice135.xls (Excel 2003)
et 01_TS_exercice135.xlsx (Excel 2007).
1. On peut conjecturer que : (a_n) est croissante ; (b_n) est décroissante ; (a_n) et (b_n) convergent vers 4.
2.



3. a. $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 6$.
b. $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
4. a. $u_n = b_n - a_n > 0$ donc $a_n < b_n$.
b. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n) > 0$. Donc (a_n) est une suite croissante.
$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) < 0$. Donc (b_n) est une suite décroissante.
5. $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.
(a_n) est une suite croissante et majorée, donc convergente.
(b_n) est une suite décroissante et minorée, donc convergente.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, les limites de (a_n) et (b_n) sont égales ; soit L la limite commune.
6. a. $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n + a_n + 2b_n)$.
D'où $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est une suite constante.
b. $v_n = v_0 = 8$ d'où $\frac{a_n + b_n}{2} = 4$: le milieu de $[A_nB_n]$ est donc le point I d'abscisse 4.
c. $a_n + b_n = 8$ d'où par passage à la limite $L + L = 8$ d'où $L = 4$.

136 **1. a.** Si (u_n) converge, sa limite L vérifie :
$$L = \frac{1}{3}L + \frac{23}{27}, \text{ soit } L = \frac{23}{18}.$$
b. On démontre l'inégalité par récurrence.
c. $u_{n+1} = u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n - \frac{23}{18}\right) < 0$.
Donc (u_n) est une suite décroissante.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge et sa limite est donc $\frac{23}{18}$ d'après **1. a.**

2. a. $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{100} \times \frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

b. $v_n = 1{,}2 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \ldots + \frac{7}{10^{n+1}}$

$= 1{,}2 + \frac{7}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$

Prises d'initiatives

137 $u_n = 35 \times 10^{-2} + 35 \times 10^{-4} + \ldots + 35 \times 10^{-2n}$

$= 35 \times 10^{-2} \times \frac{1-(10^{-2})^n}{1-10^{-2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{35 \times 10^{-2}}{1-10^{-2}} = \frac{35}{100-1} = \frac{35}{99}$.

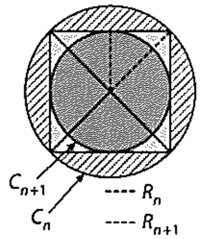
138 Si on note u_n la quantité de substance dans le corps au bout de $2n$ heures, on a $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + x$.

La suite (u_n) est croissante et converge vers $\frac{4}{3}x$.

On doit avoir $\frac{4}{3}x \leqslant 800$ soit $x \leqslant 600$.

139 Soit (C_n) la suite des cercles et (R_n) la suite des rayons :

$$\begin{cases} R_1 = R \\ R_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}R_n \end{cases}$$



L'aire du domaine hachuré vaut $\pi R_n^2 - R_{n+1}^2$, soit $\left(\pi - \frac{1}{2}\right)R_n^2$.
Donc l'aire du domaine hachuré est égale à :

$$\left(\pi - \frac{1}{2}\right)R^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

D'où l'aire totale des zones colorées vaut :

$$\left(\pi - \frac{1}{2}\right)R^2\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

soit $(2\pi - 1)R^2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

L'aire totale a pour limite $(2\pi - 1)R^2$.

140 **Étude de p_n**

Notons p_n le périmètre du polygone P_n. Par construction, la suite (c_n) des longueurs des côtés est géométrique de raison $\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

D'où $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Le nombre de côtés est le terme d'une suite géométrique de raison 4 et de premier 3, il vaut donc $3 \times 4^{n-1}$.

$$p_n = 3 \times 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Étude de S_n

Notons S_n l'aire du polygone P_n.

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (aire d'un triangle équilatéral de côté 1).

Alors $S_2 = S_1 + \frac{3}{9}S_1$; $S_3 = S_1 + \frac{3}{9}S_1 + 3 \times \frac{4}{9^2}S_1$, etc...

$S_n = S_1 + \frac{3}{9}S_1 + 3 \times \frac{4}{9^2}S_1 + 3 \times \frac{4^2}{9^3}S_1 + \ldots + 3 \times \frac{4^{n-2}}{9^{n-1}}S_1$

$= S_1 + \frac{3}{9}S_1\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \ldots\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S_1 + \frac{3}{9}S_1 \times \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{8}{5}S_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

CHAPITRE 2

Limites et continuité

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Limites de fonctions. Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. Limites et comparaison. Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. • Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. • Interpréter graphiquement les limites obtenues.	Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en Terminale. La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$.

B Notre point de vue

Les élèves ayant étudié les limites d'une suite numérique dans le chapitre précédent, nous commençons par définir les limites en l'infini d'une fonction (introduites dans l'activité 1). Nous nous appuyons sur une approche intuitive de cette notion avec l'observation de l'évolution des valeurs de $f(x)$ par lecture d'une courbe ou d'un tableau de valeurs, tout en faisant remarquer que cela peut être trompeur, et qu'il est donc nécessaire de s'appuyer sur des définitions ou sur l'utilisation de théorèmes. Nous définissons ensuite les limites infinies en un point (introduites dans l'activité 2) ainsi que les asymptotes parallèles aux axes. Nous avons jugé intéressant de compléter le cours par l'introduction des asymptotes obliques dans le cadre de l'approfondissement de l'accompagnement personnalisé.
Viennent ensuite les théorèmes généraux permettant de déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de deux fonctions (introduite dans l'activité 3) puis les théorèmes permettant de déterminer une limite par comparaison. Les fonctions polynômes ne sont pas explicitement au programme.