## Activité 4 Vers la fonction dérivée de la fonction inverse

*Il s'agit dans cette activité de conjecturer la formule donnant l'expression de la fonction dérivée de la fonction inverse. Deux approches sont proposées, l'une graphique l'autre numérique, utilisant la calculatrice. On pourra se reporter, pour une calculatrice Texas à la page 272 et pour une calculatrice Casio à la page 276.*

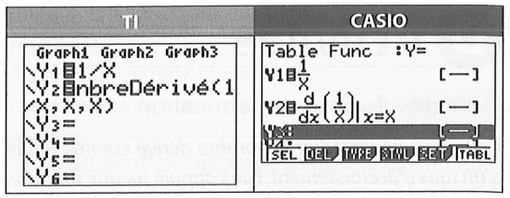
**1. a.** On obtient par lecture graphique le tableau suivant :

| $x$ | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 2 | 1 | 0,5 |
| $f'(x)$ | −16 | −4 | −1 | −0,25 |

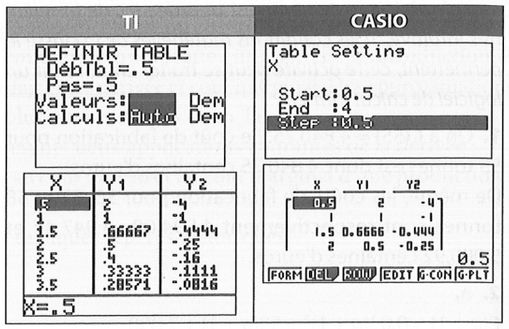
**b.** Les nombres de la troisième ligne sont les opposés des carrés des nombres de la seconde ligne.

**c.** On sait que $f(x)=\frac{1}{x}$. On peut donc conjecturer que $f'(x)=-(f(x))^2=-\left(\frac{1}{x}\right)^2=-\frac{1}{x^2}$.

**2. a.** On obtient l'écran ci-après.




**b.** On obtient les écrans suivants :




Les résultats obtenus dans les colonnes Y1 et Y2 sont bien conformes à la conjecture faite dans la question **1.c**.

# E Exercices

## POUR DÉMARRER

**1** On a $f(4)=-5$ ; $f(4+h)=-5-2h$ donc le taux d'accroissement $r(h)$ est égal à $-2$, pour $h\neq 0$.

**2** On a $f(1)=3$ et $f(1+h)=3h^2+6h+3$, d'où $r(h)=6+3h$.

**3** **1.** $r(h)=h-4$ pour $h\neq 0$.
**2.** Quand $h$ tend vers 0, $r(h)$ a pour limite $-4$.
Donc $f$ est dérivable en $-2$ et $f'(-2)=-4$.

**4** On lit $f'(-2)=-3$.

**5** On lit $f'(1)=2$.

**6** On a $f(-1)=1$ et $f'(-1)=2$.

**7** $f'(3)=-\frac{2}{3}$.

**8** On a $f'(1)=2$ et $f'(0)=-1$.

**9** T est tangente en A à $\mathscr{C}$.
Son coefficient directeur est 3.

**10** On lit $f(-1)=2$, $f(1)=0$, $f'(-1)=-1$ et $f'(1)=-5$.

**11** **1.** $f'(x)=2x+5$.
**2.** $f'(3)=11$ et $f'(1)=7$.

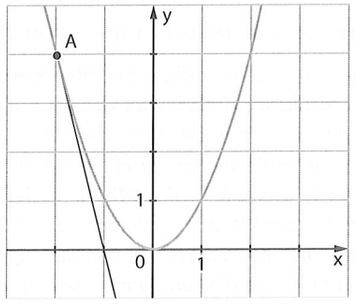
**12** **1.** $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.
**2.** $f'(3)=\frac{8}{9}$ et $f'(1)=0$.

**13** **a.** $f'(-1)=3$. **b.** $g'(-1)=-13$.
**c.** $h'(-1)=-17$.

**14** **a.** $f'(x)=12$. **b.** $g'(2)=1$.
**c.** $h'(2)=-4$.

**15** C'est le nombre dérivé de $f$ en 2, soit $-12$.

**16** **1.** Voici le tracé obtenu :




**2.** Une équation de T est $y=-4x-4$.
**3.** On peut se reporter pour Texas à la page 273 et pour Casio à la page 277.

**17** On a $f'(9)=\frac{1}{6}$ et $f'(16)=\frac{1}{8}$.



**18** Le point de contact a pour coordonnées (4 ; 2).
Le coefficient directeur de la tangente est $f'(4)=\frac{1}{4}$.
Une équation de la tangente est $y=\frac{1}{4}x+1$.

**19** **1.** On a $u'(x)=2$ et $v'(x)=-1$.
**2.** $f$ est le quotient des fonctions $u$ et $v$.
Ainsi $f'(x)=\frac{-1}{(3-x)^2}$.

**20** **a.** $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, donc $f'(1)=0$.
**b.** $g'(x)=\frac{5}{(x+3)^2}$, donc $g'(1)=\frac{5}{16}$.
**c.** Il faut lire $h(x)=\frac{3x-2}{x-4}$ et non $h(x)=\frac{3x-2}{1-x}$.
$h'(x)=\frac{-10}{(x-4)^2}$, donc $h'(1)=-\frac{10}{9}$.

**21** **a.** $f'(-2)=12$. **b.** $g'(-2)=9$.
**c.** $h'(x)=20$.

**22** **1.** $f(x)$ est l'inverse de $u(x)=3x+5$.
On obtient $f'(x)=\frac{-3}{(3x+5)^2}$.
**2.** $f'(0)=-\frac{3}{25}$, $f'(1)=-\frac{3}{64}$ et $f'(-1)=-\frac{3}{4}$.

**23** $f'(x)=-14x$.

**24** $f'(x)=-1\,500x^2$.

**25** $f'(x)=8x-3$.

**26** $f'(x)=3x^2+2x+1$.

**27** $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}$.

**28** $f'(x)=\frac{-23}{(3x+5)^2}$.

**29** $f'(x)=3x^2$.

**30** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+1$.

**31** $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}$.

**32** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

**33** $f'(x)=6x^2-2x$.

**34** $f'(x)=0{,}06x$.

**35** $f'(x)=-2x+1-\frac{1}{x^2}$.

**36** $f'(x)=1-\frac{8\,000}{x^2}$.

**37** $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$.

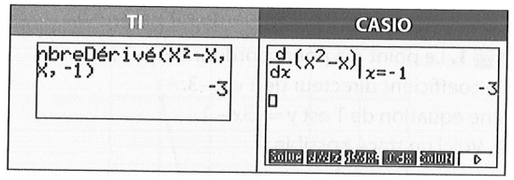
**38** $f'(x)=-4x+7$.

**39** $f'(x)=\frac{-2x}{(x+1)^2}$.

**40** $f'(x)=-0{,}03x^2+0{,}2x-2$.

## POUR S'ENTRAÎNER

**41** **1.** On a $f(-1)=2$ et $f(-1+h)=h^2-3h+2$.
**2.** Le taux d'accroissement de $f$ entre $-1$ et $-1+h$ est égal à $h-3$. Il a pour limite $-3$ quand $h$ tend vers 0.
Donc $f$ est dérivable en $-1$ et $f'(-1)=-3$.
**3.** On obtient l'écran ci-après.




**42** **1.** On a $g(2)=0$ et $g(2+h)=-h^2-2h$.
**2.** Le taux d'accroissement de $g$ entre 2 et $2+h$ est égal à $-h-2$. Il a pour limite $-2$ quand $h$ tend vers 0. Donc $g$ est dérivable en 2 et $g'(2)=-2$.
**3.** On utilise l'instruction *nbreDériv(* pour Texas et *d/dx* pour Casio.

**43** **1.** $k(-1)=-1$ et $k(-1+h)=\frac{1}{-1+h}$.
**2.** Le taux d'accroissement de $k$ entre $-1$ et $-1+h$ est égal à $\frac{1}{h-1}$.
Il a pour limite $-1$ quand $h$ tend vers 0.
Donc $k$ est dérivable en $-1$ et $k'(-1)=-1$.
**3.** On utilise l'instruction *nbreDériv(* pour Texas et *d/dx* pour Casio.

**44** **1.** On a $f(1)=1$ et $f(1+h)=1+3h+3h^2+h^3$.
Le taux d'accroissement est donc $h^2+3h+3$.
**2.** Ce taux a pour limite 3 lorsque $h$ tend vers 0.
Donc $f$ est dérivable en 1 et $f'(1)=3$.

**Pour les exercices 45 à 50, on calcule le taux $r(h)$, entre $a$ et $a+h$, de la fonction donnée, puis la limite de ce taux lorsque $h$ tend vers 0.**

**45** $r(h)=-3$ et $f'(4)=-3$.

**46** $r(h)=-h-2$ et $f'(4)=-2$.

**47** $r(h)=\frac{-2}{7(2h+7)}$ et $f'(0)=-\frac{-2}{49}$.

**48** $r(h)=h+1$ et $f'(1)=1$.

**49** $r(h)=\frac{-1}{h-1}$ et $f'(-2)=1$.

**50** $r(h)=\frac{1}{h+1}$ et $f'(2)=1$.

**51** **1.** On a $r(h)=\frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h+3}+\sqrt{3}}$.
**2.** Lorsque $h$ tend vers 0, $r(h)$ a pour limite $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, donc $f$ est dérivable en 2 et $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

**52** Vrai.

**53** Faux. En effet le taux d'accroissement a pour limite $-8$ et non $-2$ quand $h$ tend vers 0.

**54** Vrai.

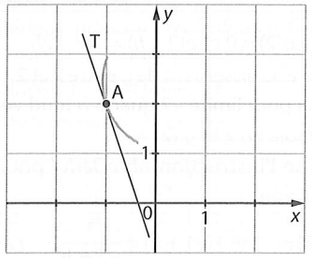
**55** Une équation de la tangente est $y=2x+1$.



CRD IUFM CORSE

**56** Une équation de la tangente est $y = 3x + 5$.

**57** **1.** Le point A a pour coordonnées (–1 ; 2).
Le coefficient directeur de T est –3.
Une équation de T est $y = -3x - 1$.
**2.** Voici un tracé possible :

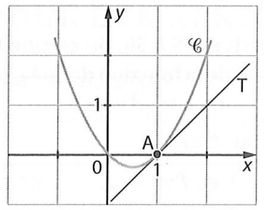



**59** Il faut lire que $f$ est dérivable en 4 (et non en 2).
On a $f'(4) = -3$. L'ordonnée de A est –14.

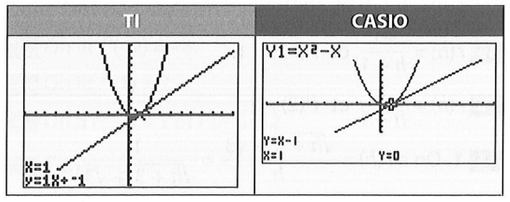
**60** Il ne faut pas calculer $g'(x)$.
Le taux d'accroissement de $g$ entre 2 et $2 + h$ est égal à $\frac{2h+3}{2h+4}$. Sa limite est $\frac{3}{4}$ lorsque $h$ tend vers 0.
La fonction $g$ est dérivable en 2 et $g'(2) = \frac{3}{4}$.
La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$y = \frac{3}{4}x + 1.$$

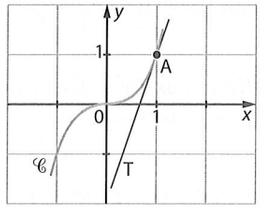
**61** **1.** On obtient le tracé suivant :




**2.** Une équation de T est $y = x - 1$.
**3.** On obtient l'écran suivant :

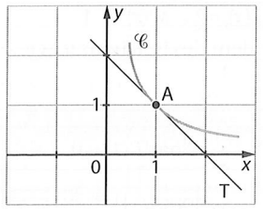



**62** **1.** On obtient le tracé suivant :




**2.** Une équation de T est $y = 3x - 2$.
**3.** Se reporter à la page 273 pour Texas et à la page 277 pour Casio.

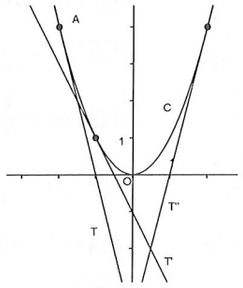
**63** **1.** On obtient le tracé suivant :




**2.** Une équation de T est $y = -x + 2$.
**3.** Se reporter à la page 273 pour Texas et à la page 277 pour Casio.

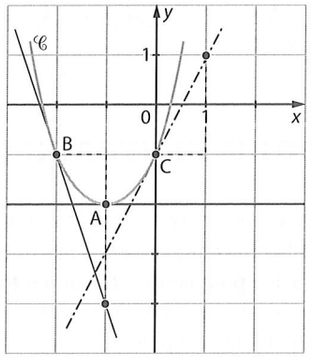
**64** **1.** On lit graphiquement $f'(-1) = 3$ et $f'(2) = -6$.
**2.** On lit de même que l'ordonnée de A est –4 et que celle de B est 5.
La tangente $T_1$ est la droite passant par A de coefficient directeur 3. Une équation de $T_1$ est $y = 3x + p$ telle que $-4 = -3 + p$ ; d'où $p = -1$. Une équation de $T_1$ est donc $y = 3x - 1$. De même une équation de $T_2$ est $y = -6x + 17$.

**65** ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_exercice65.ggb (Geogebra).**
On obtient la figure suivante :




Les équations des droites T, T' et T'' sont respectivement :
$y = -4x - 4$ ; $y = -2x - 1$ et $y = 4x - 4$.

**66** On obtient les tracés suivants :






**67** Faux, car les nombres dérivés de $f$ et $g$ en A ne sont pas nécessairement égaux.

**68** Vrai.

**69** Vrai.

**70** Faux, car le coefficient directeur de la tangente en A est – 2 ; donc $f'(3) = -2$.

**71** **a.** $g'(x) = 5$, donc $f'(3) = g'\left(\frac{1}{3}\right) = 5$.

**b.** $f'(x) = 4x^3$, donc $g'(3) = 108$ et $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

**c.** $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(3) = -\frac{1}{9}$ et $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -9$.

**72** **a.** $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(-1) = 3$ et $f'(\sqrt{2}) = 6$.
**b.** $f'(x) = 4x^3$, donc $f'(-1) = -4$ et $f'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$.
**c.** $f'(x) = -2$, donc $f'(-1) = -2$ et $f'(\sqrt{2}) = -2$.

**73** **a.** $f'(x) = 0$, donc $f'(0{,}01) = 0$ et $f'(3) = 0$.
**b.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(0{,}01) = \frac{1}{0{,}2}$ et $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
**c.** $f'(x) = 2x$, donc $f'(0{,}01) = 0{,}02$ et $f'(3) = 6$.

**74** **a.** $f'(x) = 0$, donc $f'(-2) = 0$ et $f'(0{,}001) = 0$.
**b.** $f'(x) = 3$, donc $f'(-2) = 3$ et $f'(0{,}001) = 3$.
**c.** $f'(x) = -2$, donc $f'(-2) = -2$ et $f'(0{,}001) = -2$.

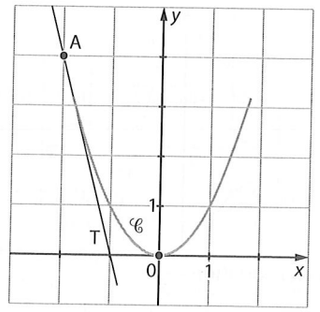
**75** **1.** On a $f'(x) = 3x^2$, d'où :
**a.** $f'(0) = 0$ ; **b.** $f'(2) = 12$ ;
**c.** $f'(-1) = 3$ ; **d.** $f'(12) = 432$.
**2.** On résout l'équation $f'(x) = 48$, soit $3x^2 = 48$.
Il y a deux tangentes aux points d'abscisse 4 et –4.
**3.** $3x^2$ est un réel positif. Il n'y a pas de tangente de coefficient directeur –108.

**77** On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
**1.** $f'(9) = \frac{1}{6}$ et $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
**2.** On résout l'équation $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$. Cette équation a pour unique solution $\frac{1}{16}$.
**3.** Le réel $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est positif. L'équation $f'(x) = -1$ n'a donc pas de solution.

**78** $f'(x) = 3x^2$, donc :
**1.** vrai ; **2.** vrai ; **3.** vrai.

**79** $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc :
**1.** faux ; **2.** faux ; **3.** vrai.

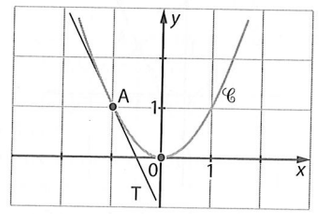
**80** **1.** $f'(x) = 2x$ ; le coefficient directeur de T est $f'(-2)$, soit –4.
Une équation de T est $y = -4x - 4$.
**2.**




**81** $f'(x) = 3x^2$ ; le coefficient directeur de T est $f'(-2)$, soit 12.
Une équation de T est $y = 12x + 16$.

**82** Le coefficient directeur de la tangente doit être égal à 4.
On résout l'équation $2x = 4$.
Cette équation a une seule solution : 2.
Le point A a pour abscisse 2.

**83** **1.** T a pour équation $y = -2x - 1$.
**2.**



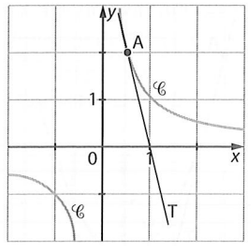

**3. a.** On résout l'équation $2x = -6$.
Cette équation a une seule solution : –3.
**b.** Le point de contact a pour coordonnées (–3 ; 9).

**84** On résout l'équation $2x = -4$.
Elle a une seule solution : –2.
Le point de coordonnées (–2 ; 4) appartient à la droite et à la représentation graphique de la fonction carré.

**85** On obtient la figure suivante :

**86** **1.** Une équation de T est $y = -4x + 4$.

**2.** On obtient la figure suivante :




**3.** On résout l'équation $-\frac{1}{x^2} = -4$.

Cette équation a deux solutions : $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

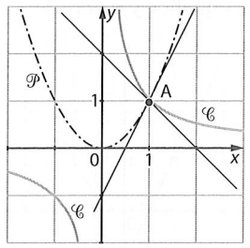
Les coordonnées des points de contact sont :

$$\left(\frac{1}{2} ; 2\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{2} ; -2\right).$$

**87** **1.** Les coordonnées de A vérifient les deux équations.

**2.** Les équations des tangentes en A à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{H}$ sont respectivement $y = 2x - 1$ et $y = -x + 2$.

**3.** On obtient la figure suivante :




**88** **1.** Les coordonnées de A vérifient les deux équations.

**2.** Les équations des tangentes T et T' à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{C}$ sont respectivement $y = 2x - 1$ et $y = 0{,}5x + 0{,}5$.

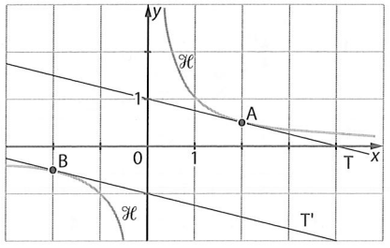
**89** **2. a.** On a $f'(2) = -\frac{1}{4}$. Une équation de T est

$$y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

**3. a.** L'équation $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$ admet deux solutions : 2 et –2.

La tangente T' à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse –2 est parallèle à T.

Voici les tracés demandés :




**91** **1.** Une équation de T est $y = -x - 2$.

**2.** On a $\frac{1}{x} - (-x - 2) = \frac{(x+1)^2}{x}$ pour $x \neq 0$.

**3.** Cette différence est négative sur $]-\infty ; 0[$, donc la courbe $\mathcal{C}$ est située en dessous de la droite T.

**4.** Se reporter à la page 273 pour Texas et à la page 277 pour Casio.

**92** **1.** On résout l'équation $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$.

Elle a pour solution unique $\frac{1}{4}$.

Le point A a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$.

**2.** Une équation de T est $y = x + \frac{1}{4}$.

**93** Faux. En effet, $f'(x) = -6$ donc $f'(1) = -6$.

**94** Faux. En effet, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(2) = 12$.

**95** Faux car $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

D'où $f'(1) = 2$ et $g'(1) = -1$.

**96** Faux, car l'équation $-\frac{1}{x^2} = 3$ n'a pas de solution.

**97** Vrai.

**98** $f'(x) = 12x^2$.

**99** $g'(x) = -6x$.

**100** $h'(x) = -12x - 7$.

**101** $k'(x) = 15x^2 - 4x + 3$.

**102** $k'(t) = -4t^2 + \frac{1}{2}$.

**103** $f'(x) = \frac{4}{(3 - 4x)^2}$.

**104** $g'(x) = \frac{7}{(3x - 4)^2}$.

**105** $h'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.

**106** La fonction $f$ est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

**107** La fonction $g$ est dérivable sur $]-4 ; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{5}{(x+4)^2}$.

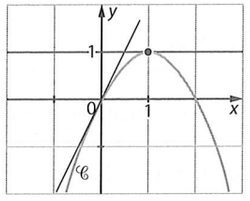
**108** La fonction $h$ est dérivable sur $]2{,}5 ; +\infty[$ et $h'(x) = \frac{4}{(2x - 5)^2}$.

**109** La fonction $p$ est dérivable sur $]3 ; +\infty[$ et $p'(x) = \frac{13}{(3 - x)^2}$.

**111** **2.** $f$ est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x + 2$.

**3.** Les coefficients directeurs sont 2 et 0.

**4.** On obtient la figure suivante :






**112** **1.** L'écran de la calculatrice permet de conjecturer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point A(1 ; 0).

On a $f'(x) = -3x^2 + 2x$. Donc $f'(1) = -1$ qui est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$. De plus les coordonnées de A vérifient les équations de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$.

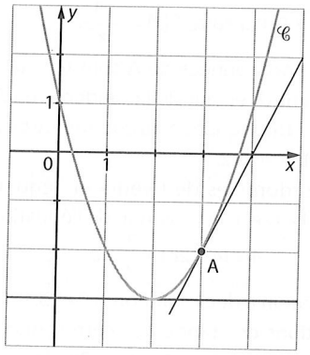
**2.** L'équation $f'(x) = -1$ admet deux solutions : 1 et $-\frac{1}{3}$.

Il existe donc une autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à $\mathcal{D}$.

Le point de contact a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{4}{27}\right)$.

La tangente a pour équation $y = -x - \frac{5}{27}$.

**113** **1.** On a la figure suivante :




**2.** On a $f'(x) = 2x - 4$. L'équation $f'(x) = 2$ admet 3 pour unique solution.

Le point A a pour coordonnées (3 ; –2).

L'équation de la tangente en A est $y = 2x - 8$.

**3.** On résout l'équation $f'(x) = 0$ qui a pour solution $x = 2$. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

**114** **1.** On a $f(1) = 4$ et $f'(1) = 5$.

**2.** L'égalité $f(1) = 4$ se traduit par $m + p + 2 = 4$, soit $m + p = 2$.

$f'(x) = 2mx + p$ ; l'égalité $f'(1) = 5$ se traduit par $2m + p = 5$.

Le système cherché est donc $\begin{cases} m + p = 2 \\ 2m + p = 5 \end{cases}$

**3.** Les solutions sont $m = 3$ et $p = -1$.

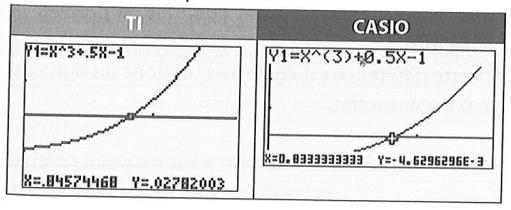
On peut conclure que $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

**115** **1.** On peut choisir comme fenêtre :

Xmin = 0 ; Xmax = 1,5 ; Ymin = –1 et Ymax = 3.

Avec la commande **Trace**, on obtient une approximation de l'abscisse du point d'intersection de la courbe : 0,8.

Voici l'écran correspondant :




**2.** L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans [0 ; 1,5].

**3. a.** Une équation de la tangente est :

$$y = 2{,}42x - 2{,}02.$$

**b.** On obtient comme approximation : 0,83.

**116** Il faut lire $C(q) = 0{,}01q^3 - q^2 + 2q + 1{,}5$ (et non pas $C(q) = 0{,}01q^2 + 2q + 1{,}5$).

**1.** Comme $C(q) = 0{,}01q^3 - q^2 + 2q + 1{,}5$, on a :

$$C_m(q) = 0{,}03q^2 - 1{,}97q + 1{,}01.$$

**2.** $C'(q) = 0{,}03q^2 - 2q + 2$.

**3.** $E(q) = -0{,}03q + 0{,}99$. On résout l'inéquation $-0{,}03q + 0{,}99 \leqslant 0{,}01$, soit $q \geqslant \frac{98}{3}$.

**117** $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 10x}{(x^2 + 1)^2}$.

**118** $f'(x) = 10x^9 + 14x^6 + 12x^5 + 4x^3 + 12x^2$.

**119** $f'(x) = \frac{(3x^2 + 1)\sqrt{x(x^2 + 1)}}{2x(x^2 + 1)}$.

**120** $f'(x) = \frac{3x^2 + 8x}{2\sqrt{x + 2}(x + 2)}$.

**121** $f'(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$.

**122** $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 - \frac{\sqrt{x + 1}(3x + 1)}{2(x^2 - 1)^2}$.

**123** **1.** Énoncé vrai. L'énoncé réciproque « Si $f$ est définie en $a$, alors $f$ est dérivable en $a$ » est faux.

**2.** Énoncé vrai. L'énoncé réciproque « Si $f'(x) = 1$, alors $f(x) = x$ » est faux.

**3.** Énoncé faux. L'énoncé réciproque « Si la tangente en 1 à la courbe de $f$ a pour équation $y = x$ alors $f'(1) = 1$ » est vrai.

**4.** Énoncé faux. L'énoncé réciproque « Si $f'(1) = g'(1)$, alors $f(1) = g(1)$ » est faux.

**124** $f$ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est dérivable : $f'(x) = 2x \times x + x^2 \times 1 = 3x^2$.

**125** **1.** $f(x) = (u(x))^2 \times u(x)$.

**2.** $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x) \times u(x) + (u(x))^2 \times u'(x)$

$= 3u'(x) \times (u(x))^2$,

soit $(u^3)' = 3u^2u'$.

**3.** On utilise le résultat précédent avec $u(x) = x^2 - 1$.

D'où $u'(x) = 2x$

et $f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \times 2x = 6x(x^2 - 1)^2$.

**126** **1.** ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_exercice126.xws (Xcas)**
**et 04ES-L_exercice126.dfw (Derive).**

On pose $f(x) = 2x^2 - x - 5$ et $g(x) = -x^3 + 3x + 3$.

On résout l'équation $f(x) = g(x)$. Pour cela, on utilise, avec Xcas, la commande **resoudre** (voir page 270) et avec Derive la commande **solve** (voir page 271).

L'équation a deux solutions –2 et 2. Les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection A(–2 ; 5) et B(2 ; 1).

**2.** On a $f'(-2) = g'(-2)$ et $f'(2) \neq g'(2)$. Les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont une tangente commune en A.

**127** Vrai.

**128** Faux, car l'équation $-\frac{1}{x^2} = 10$ n'a pas de solution.

**129** Faux. On a $f'(x) = 2 + \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

**130** Faux. On a $f'(x) = 6(3x - 1)$.

**131** Vrai.

**132** $f'(x) = 9x^2 - 10x + 3$.

**133** $u'(x) = \frac{5}{(-x+2)^2}$.

**134** On a $f'(x) = 3x^2 + 6x$. L'équation $f'(x) = -3$ a pour unique solution –1.

**135** Soit $f(x) = \frac{4}{x}$. On résout l'équation $f'(x) = -2$, soit $\frac{-4}{x^2} = -2$. Elle a pour solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Les points ont pour coordonnées $(\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}\ ;\ -2\sqrt{2})$.

**136** $p'(x) = 3x^2 - 8x$. L'équation $3x^2 - 8x = 0$ a pour solutions 0 et $\frac{8}{3}$.

Les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points (0 ; 0) et $\left(\frac{8}{3} ; -\frac{256}{27}\right)$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

**137** $f'(x) = 2x$.

Une équation de la tangente est $y = 2x + 2$.

## POUR FAIRE LE POINT

Attention, les réponses aux questions ❸, ❺, ❼ et ❽ sont erronées en fin de manuel. Voici les bonnes réponses :

❶ A et D ; ❷ C ; ❸ A ; ❹ C et D ;
❺ A ; ❻ B et C ; ❼ A et D ; ❽ C ;
❾ C ; ❿ A et D.

## POUR APPROFONDIR

**138** **1.** Le coût fixe est 600 €.

**2.** $C(200) = 880$.

**3.** $C'(200) = 1{,}4$.

**4. a.** $C(201) - C(200) = 1{,}39$.

**b.** On obtient un résultat voisin à celui obtenu dans la question **3**.

**5.** Le coût du 201e article est plus élevé que le coût du 401e article.

**139** **1.** $f(a+h) - f(a) = -\frac{h}{a^2 + ah}$. Le taux d'accroissement $r(h)$ est égal à $-\frac{1}{a(a+h)}$.

**2.** Quand $h$ tend vers $a$, $r(h)$ a pour limite $-\frac{1}{a^2}$ pour tout réel $a \neq 0$. Par suite $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

**140** **1.** Les coordonnées de A sont $(a\ ;\ -a^2 + 4a - 2)$. Le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(a)$, donc $4 - 2a$. Une équation de la tangente en $a$ est donc $y = (4 - 2a)x + a^2 - 2$.

**2.** Les coordonnées de I vérifient l'équation de la tangente. Le réel $a$ est solution de l'équation :

$$4 = (4 - 2a) \times \frac{3}{2} + a^2 - 2.$$

Cette équation a deux solutions : 0 et 3.

Les équations des tangentes correspondantes sont respectivement $y = 4x - 2$ et $y = -2x + 7$.

**141** **1.** On a : $C(1\,000) = 111\,000$ ;
$C(1\,001) = 111\,066{,}003$.

L'augmentation du coût est 66,003.

**2. a.** Le coût marginal au rang 200 est 66,003.

**b.** $C'(x) = 0{,}006x + 60$. Ainsi $C'(1\,000) = 66$.

**c.** $d(1\,000) - C'(1\,000) = 0{,}003$.

Les nombres $d(1\,000)$ et $C'(1\,000)$ sont voisins.

**142** ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_exercice142.xws (Xcas)**
**et 04ES-L_exercice142.ggb (Geogebra).**

On pourra se reporter à la page 270.

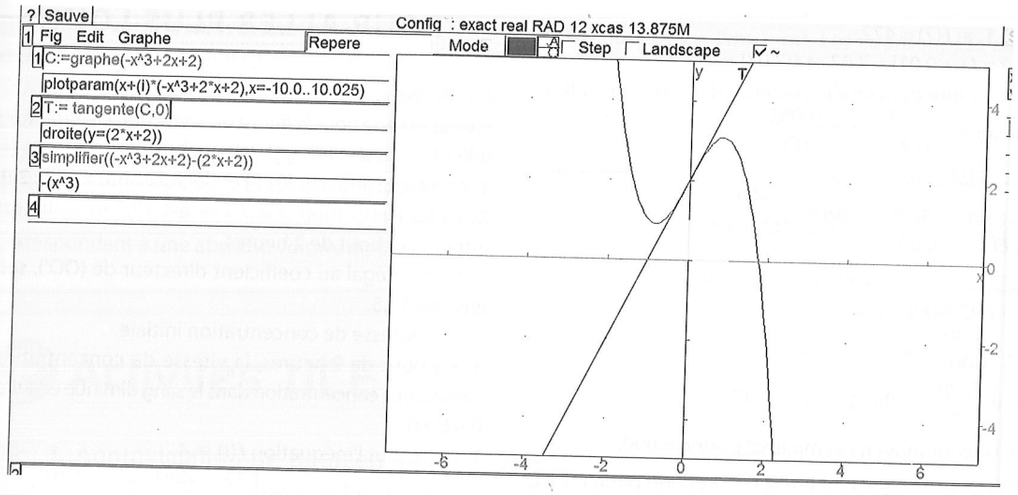
**1.** Dans le menu Geo, on choisit l'outil New figure 2D. Les commandes utilisées se trouvent dans le menu Scolaire. La copie d'écran **en haut de page suivante** fournit les lignes d'instructions à écrire.

**2.** On peut conjecturer :
– si $x \leqslant 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente T
– si $x \geqslant 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

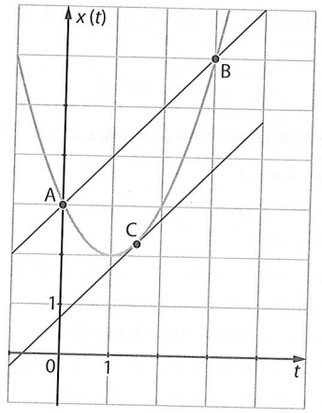
**3.** Le logiciel donne une équation de T : $y = 2x + 2$. La différence (-x^3+2x+2)-(2x+2) permet de prouver la conjecture.

**4.** Cette différence est égale à $-x^3$ et donc du signe de $-x$. D'où le résultat.






**143** **1.** On obtient la figure suivante :




La vitesse moyenne entre les instants $t = 0$ et $t = 3$ est égale à $\frac{x(3) - x(0)}{3}$, soit 1.

La vitesse instantanée est $x'(t)$, donc $2t - 2$.

L'équation $x'(t) = 1$ a pour solution 1,5.

À l'instant $t + 1{,}5$, la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 3$.

Si A(0, $x(0)$) et B(3, $x(3)$), au point C(1,5 ; $x(1{,}5)$) la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB).

**144** **1.** Les conditions se traduisent par les égalités :

$$f(3) = 0\ ;\ f(0) = 2\ ;\ f'(0) = 2.$$

D'où $f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2x + 2$.

**2.** La deuxième solution de l'équation $f(x) = 0$ est $-\frac{3}{4}$.

*Cet exercice peut se traiter en utilisant un logiciel de calcul formel.*

***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_exercice144.xws (Xcas) et**
**04ES-L_exercice144.dfw (Derive).**

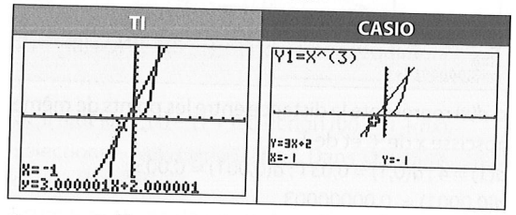
*Se reporter pages 270 (Xcas) et 271 (Derive).*

**145** **1.** $-9{,}8t + 29{,}4$.

**2.** C'est la vitesse à l'instant $t = 0$.

**3.** La pierre touche le sol à l'instant $t = 6$ ; sa vitesse sera alors de $-29{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

**146** **1.** On obtient l'écran suivant :




Pour $x \leqslant 2$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de T et pour $x \geqslant 2$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

**2.** Une équation de T est $y = 3x + 2$.

**3.** On obtient l'égalité en développant le second membre.

**4.** L'équation $(x - 2)(x + 1)^2 = 0$ a pour solutions – 1 et 2 ; d'où B(2 ; 8).

**5.** La différence $x^3 - (3x + 2)$ a même signe que $x - 2$.

On démontre ainsi la conjecture de la question **1**.

**147** **1. a.** $y = -x + 1$.

**c.** $d(x)$ représente la distance entre les points de même abscisse $x$ de $\mathcal{C}$ et de T.

$d(1) = 0{,}5$ ; $d(0{,}1) \approx 0{,}009$ ;

$d(0{,}001) \approx 0{,}00000099$ ;

$d(0{,}0001) \approx 0{,}00000001$.

La différence est voisine de 0 quand $x$ est proche de 0.

**2. a.** Environ 66,67 euros.

**b.** L'erreur est environ 1,37 euros.

**148** **1. a.** $f(7) = 472$.

**b.** $7 \times (1 + 0{,}01) = 7{,}07$ et $f(7{,}07) = 471{,}72$.

La quantité demandée a environ diminuée de 0,06 % puisque $\frac{471{,}72}{472} - 1 \approx \frac{0{,}059}{100}$.

**2. a.** $E(p) < 0$.

**b.** $f'(p) = -4$, donc $E(p) = \frac{-4p}{500 - 4p}$.

**c.** $E(7) = -0{,}06$.

**149** **1. a.** $C'(q) = 0{,}003q^2 - 2{,}4q + 600$, donc $C'(600) = 240$.

**b.** $\frac{C(600)}{600} = 240$.

**2. a.** $\frac{C(q)}{q} = 0{,}001q^2 - 1{,}2q + 600$.

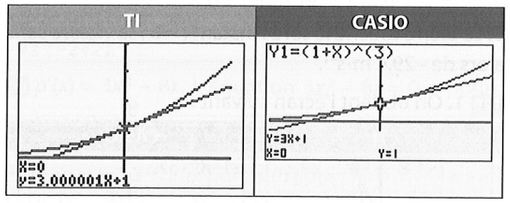
**b.** Le coût moyen est minimal pour $q = 600$.

**150** Question 3, il faut lire $g(1) = 2$ et non pas $g'(1) = 2$.

**1.** Faux. **2.** Faux. **3.** Vrai.
**4.** Faux. **5.** Vrai.

**151** **1. a.** Une équation de T est : $y = 3x + 1$.

**b.** On obtient l'écran suivant :




**c.** $d(x)$ représente la distance entre les points de même abscisse $x$ de $\mathscr{C}$ et de T.

$d(1) = 4$ ; $d(0{,}1) = 0{,}031$ ; $d(0{,}001) \approx 0{,}003$ ; $d(0{,}0001) \approx 0{,}00000003$.

La différence $d(x)$ est voisine de 0.

**2. a.** Le salaire est multiplié par $1{,}02^3$.

**b.** $1{,}02^3 = (1 + 0{,}02)^3 \approx 1 + 3 \times 0{,}02$, donc $1{,}02^3 \approx 1{,}06$.

$1\,800 \times 1{,}02^3 \approx 1\,910{,}17$ et $1\,800 \times 1{,}06 = 1\,908$.

Donc l'erreur commise en appliquant l'approximation est égale à 2,17 €.

## POUR ALLER PLUS LOIN

**152** **Partie A**

***Fichier associé pour la figure sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_exercice152.ggb (Geogebra).**

**1.** $f$ est croissante sur [0 ; 2] et décroissante sur [2 ; 24].

**2.** La concentration maximale est 12,5 mg, elle est atteinte au bout de 2 heures.

**3.** $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de (OO'), soit environ 12,5.

C'est la vitesse de concentration initiale.

**4.** Au bout de 2 heures, la vitesse de concentration s'annule. La concentration dans le sang diminue ensuite.

**Partie B**

**1.** On résout l'inéquation $f(t) \geqslant 4$.

L'ensemble solution est $\left[\frac{25 - \sqrt{561}}{4} ; \frac{25 + \sqrt{561}}{4}\right]$.

La durée d'efficacité du médicament est environ 11,8 heures.

**2.** $f'(t) = \frac{200 - 50t^2}{(t^2 + 4)^2}$, donc $f'(2) = 0$.

**3. a.** On résout l'équation $f'(t) = 6$, soit :

$\frac{200 - 50t^2}{(t^2 + 4)^2} = 6$ ou $\frac{200 - 50t^2}{(t^2 + 4)^2} - 6 = 0$

ou $\frac{6t^4 + 98t^2 - 104}{(t^2 + 4)^2} = 0$.

On résout donc l'équation $6t^4 + 98t^2 - 104 = 0$.

**b.** $x$ est positif et on obtient l'équation :

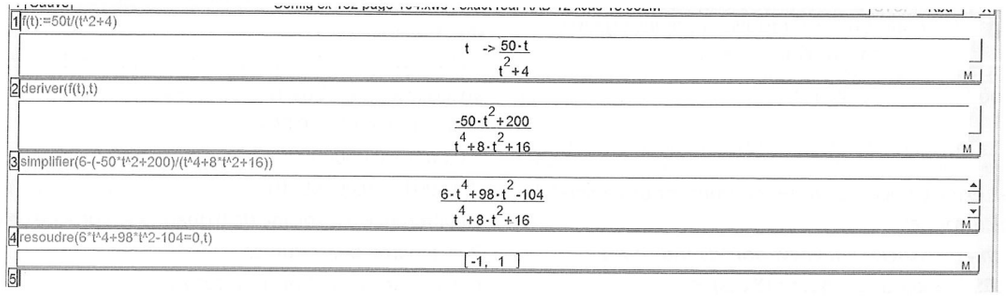
$$6x^2 + 98x - 104 = 0.$$

**c.** Une seule solution convient : 1. L'équation $t^2 = 1$ a une seule solution positive 1 car $t \geqslant 0$.

La vitesse de concentration est égale à 6 mg.h$^{-1}$ à l'instant $t = 1$ h.

*Les résultats de la partie B peuvent être contrôlés à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Se reporter page 270 (Xcas) et page 271 (Derive). On obtient l'écran en* ***bas de page.***

***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_exercice152.xws (Xcas) et**
**04ES-L_exercice152.dfw (Derive).**






**153** ***Fichier associé sur www.indice-bordas.fr :***
**04ES-L_exercice153.ggb (Geogebra).**

*Se reporter page 266.*

**1.** A(–1 ; 1) et P(1 ; 0,5).

**2.** $y = x^2$.

**3.** Il y a deux tangentes à la parabole passant par P. Une seule convient avec le problème posé. Le point M correspondant à une abscisse voisine de 0,28.

**4.** On obtient $y = 2mx - m^2$. Les coordonnées de P doivent vérifier cette équation.

Le réel $m$ est solution de $m^2 - 2m + 0{,}5 = 0$.

Une solution convient : $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$, soit environ 0,293.

Ce résultat est bien conforme à la conjecture faite à la question **3**.

# F Activités TICE

## TP 1 Approximation de pourcentages

*L'objectif de ce TP est d'approximer un pourcentage d'augmentation, équivalent à plusieurs hausses successives. Pour cela on utilise les différentes possibilités d'un logiciel (géométrie, calcul de dérivée, tableur).*

***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :***
**04ES-L_TP1B.ggb et 04ES-L_TP1C.ggb (Geogebra).**

**A. 1. a.** Le salaire est 2 121,80 €. Il a augmenté de 6,09 %.

**b.** L'erreur sur le salaire est 1,80 € et sur le pourcentage, elle est de 0,09 %.

**2. a.** L'effectif est 1 568. Il a augmenté de 1,96 %.

**b.** L'erreur sur l'effectif est 128 et sur le pourcentage, elle est de 0,16 %.

**3.** Cette approximation est valable pour des petites valeurs de $t$.

**B. 1.** $f'(x) = 2 + 2x$, d'où $f'(0) = 2$.

Une équation de T est $y = 1 + 2x$.

**2.** Avec Geogebra, dans Options/graphique choisir

| | |
|---|---|
| Axe X Nombres | Distance 0,1 |
| Xmin = –1 | Xmax = 1 |
| Axe Y Nombres | Distance 0,5 |
| Ymin = –1 | Ymax = 4 |

Dans le champ de saisie, écrire successivement l'expression de $f$, A=(0,f(0)), et Tangente [A,f].

**3.** À l'aide de la commande Nouveau point (outil Points), placer M sur $\mathscr{C}$ et construire la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M avec la commande Droite perpendiculaire (outil Constructions). Construire P avec la commande Intersection entre deux objets (outil Points). Pour obtenir la distance MP, utiliser la commande Distance ou Longueur (outil Nombres et Angles) puis cliquer sur M et sur P.

**4.**

| $x$ | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distance MP** | 0,49 | 0,25 | 0,16 | 0,3 | 0,04 | 0,01 |

**a.** Cette distance tend vers 0 lorsque M se rapproche de A.

**b.** $MP = (1 + x)^2 - (1 + 2x) = x^2$.

**C. 1.** Dans le champ de saisie, écrire Dérivée[(1+x)^3] puis Dérivée[(1+x)^4].

On lit $f'_3(x)$ et $f'_4(x)$ dans la Fenêtre Algèbre.

**2.** $f'_n(0) = n$ et A(0 ; 1), donc T a pour équation $y = 1 + nx$.

**3.** Il faut lire $f_n(x) - (1 + nx)$ et non $f(x) - (1 + nx)$.

Sélectionner Affichage /Tableur. Dans Options/Arrondi, choisir 4 décimales

Écrire les valeurs de $x$ dans les cellules **B1** à **F1** et les valeurs de $n$ dans les cellules **A2** à **A4**.

Dans la cellule **B2**, écrire :

=(1+B$1)^$A2-(1+B$1*$A2)

Recopier jusqu'à **F4**.

On obtient le tableau suivant :

| $x$ \ $n$ | 0,03 | 0,025 | 0,02 | 0,015 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 0,027 | 0,0019 | 0,0012 | 0,0007 | 0,0003 |
| **5** | 0,0093 | 0,0064 | 0,0041 | 0,0023 | 0,001 |
| **10** | 0,0439 | 0,0301 | 0,019 | 0,0105 | 0,0046 |

**4.** 1 800 euros.

**5.** Écrire les entiers de 1 à 20 à partir de la cellule **A8**.

Dans **B8**, écrire :

=1.008^A8-(1+0.008*A8)

On observe que pour $n = 17$, $d(0{,}008) \approx 0{,}0091$ et pour $n = 18$, $d(0{,}008) \approx 0{,}0102$.

À partir de $n = 18$, on a $d(x) > 0{,}01$.